

OR1 Aufgabe

Gruppennummer: 176

Jens Umland (winf2843)

Nico Jenkel(winf2864)

Aufgabenstellung:

$$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \geq 6$$

$$2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 \geq 5$$

$$-1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 \geq 17$$

$$-4 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 - 1 \cdot x_3 \leq 9$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Min } 36 \cdot x_1 + 72 \cdot x_2 + 24 \cdot x_3 = z$$

1. Angabe des mathematischen Modells
2. Angabe der kanonischen Form
3. Angabe des Ausgangstableaus
4. Lösung der Aufgabenstellung mittels Simplexalgorithmus. Anzugeben sind die in jedem Schritt berechneten Tableaus.
5. Ergebnis der Berechnung und deren Interpretation entsprechend der Aufgabenstellung
6. Herleitung des dualen Problems und Angabe des mathematischen Modells
7. Angabe der kanonischen Form
8. Angabe des Ausgangstableaus
9. Lösung der Aufgabenstellung mittels Simplexalgorithmus. Anzugeben sind die in jedem Schritt berechneten Tableaus.
10. Ergebnis der Berechnung und deren Interpretation entsprechend der Aufgabenstellung
11. Lösen des primalen Problems unter Verwendung der OMP-Software. Drucken Sie das eingegebene Modell und die Ergebnisse aus.
12. Lösen des dualen Problems unter Verwendung der OMP-Software. Drucken Sie das eingegebene Modell und die Ergebnisse aus.

(Punkt 11 und 12 in beigefügter Excel Datei)

1. Mathematisches Modell

$$\begin{array}{rcll} x_1 & + & 2x_2 & + x_3 & \geq & 6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & \geq & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & + x_3 & \geq & 17 \\ -4x_1 & + & x_2 & - x_3 & \leq & 9 \end{array}$$

Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Zielfunktion:

$$36x_1 + 72x_2 + 24x_3 = z \quad \rightarrow \text{Min}$$

Transformation in ein Maximumproblem ($z^* (-1)$):

$$-36x_1 - 72x_2 - 24x_3 = -z \quad \rightarrow \text{Max}$$

Angabe der kanonischen Form

Schlupfvariablen

Künstliche Variablen

$$\begin{array}{rcll} x_1 & + & 2x_2 & + x_3 & - x_4 & & + x_8 & = & 6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & - x_5 & & + x_9 & = & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & + x_3 & & - x_6 & & + x_{10} & = & 17 \\ -4x_1 & + & x_2 & - x_3 & & & + x_7 & & = & 9 \end{array}$$

Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Zielfunktion:

$$-36x_1 - 72x_2 - 24x_3 - Mx_8 - Mx_9 - Mx_{10} = -z \quad \rightarrow \text{Max}$$

2. Ausgangstableau

	BV	NBV	NBV	NBV	NBV	NBV	NBV	BV	BV/KV	BV/KV	BV/KV	RS	Q
		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10		
BV/KV	x8	1	2	1	-1	0	0	0	1	0	0	6	3
BV/KV	x9	2	3	0	0	-1	0	0	0	1	0	5	5/3
BV/KV	x10	-1	1	1	0	0	-1	0	0	0	1	17	17
	x7	-4	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	9	9
	$-(-z)$	-36	-72	-24	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$-z'$	2	6	2	-1	-1	-1	0	1	1	1	28	

3. Lösung der Aufgabenstellung mittels Simplexalgorithmus

	BV	NBV	NBV	NBV	NBV	NBV	NBV	BV	BV/KV	BV/KV	BV/KV	RS	Q
		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	x10		
BV/KV	x8	1	2	1	-1	0	0	0	1	0	0	6	3
BV/KV	x9	2	3	0	0	-1	0	0	0	1	0	5	5/3
BV/KV	x10	-1	1	1	0	0	-1	0	0	0	1	17	17
	x7	-4	1	-1	0	0	0	1	0	0	0	9	9
	$-(-z)$	-36	-72	-24	0	0	0	0	0	0	0	0	
	$-z'$	2	6	2	-1	-1	-1	0	1	1	1	28	

	BV	NBV	BV	NBV	NBV	NBV	NBV	BV	BV/KV		BV/KV	RS	Q
		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8		x10		
BV/KV	x8	-1/3	0	1	-1	2/3	0	0	1		0	8/3	8/3
BV	x2	2/3	1	0	0	-1/3	0	0	0		0	5/3	%
BV/KV	x10	-5/3	0	1	0	1/3	-1	0	0		1	46/3	46/3
	x7	14/3	0	-1	0	1/3	0	1	0		0	22/3	%
	$-(-z)$	-60	0	-24	0	-24	0	0	0		0	120	
	$-z'$	-2	0	2	-1	1	-1	0	1		1	18	

	BV	NBV	BV	BV	NBV	NBV	NBV	BV			BV/KV	RS	Q
		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7			x10		
BV	x3	-1/3	0	1	-1	2/3	0	0			0	8/3	%
BV	x2	2/3	1	0	0	-1/3	0	0			0	5/3	%
BV/KV	x10	-4/3	0	0	1	-1/3	-1	0			1	38/3	38/3
	x7	-5	0	0	-1	1	0	1			0	10	%
	$-(-z)$	-68	0	0	-24	-8	0	0			0	184	
	$-z'$	-4/3	0	0	1	-1/3	-1	0			1	38/3	

	BV	NBV	BV	BV	BV	NBV	NBV	BV				RS	
		x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7					
BV	x3	-5/3	0	1	0	1/3	-1	0				46/3	
BV	x2	2/3	1	0	0	-1/3	0	0				5/3	
BV	x4	-4/3	0	0	1	-1/3	-1	0				38/3	
	x7	19/3	0	0	0	2/3	-1	1				68/3	
	$-(-z)$	-100	0	0	0	-16	-24	0				488	

4. Ergebnis der Berechnung und Interpretation

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 5/3$$

$$x_3 = 46/3$$

$$z = 488$$

$$36x_1 + 72x_2 + 24x_3 = z \quad \text{--> Min}$$

$$36 \cdot 0 + 72 \cdot 5/3 + 24 \cdot 46/3 = 488$$

Interpretation:

Dadurch, dass wir keine Aufgabenstellung mit konkreten Variablenbezeichnungen erhalten haben, ist eine Interpretation im Bezug auf die Variablenbezeichnungen (z.B. x_1 : Materialbedarf und/oder z : minimale Kosten) nicht möglich.

Der optimale minimale Zielfunktionswert wurde bei 488 gefunden. Hierzu werden 0 Einheiten von x_1 , $5/3$ Einheiten von x_2 und $46/3$ Einheiten von x_3 verwendet.

5. Herleitung des dualen Problems und Angabe des mathematischen Modells

$$\begin{array}{rccccrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \geq & 6 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & & & \geq & 5 \\ -x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \geq & 17 \\ -4x_1 & + & x_2 & - & x_3 & \leq & 9 \end{array}$$

Nichtnegativitätsbedingung:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Zielfunktion:

$$36x_1 + 72x_2 + 24x_3 = z \quad \rightarrow \text{Min}$$

Duales Problem aus primalen Problem hergeleitet:

$$\begin{array}{rccccrcr} 1w_1 & + & 2w_2 & - & 1w_3 & - & 4w_4 & \leq & 36 \\ 2w_1 & + & 3w_2 & + & 1w_3 & + & 1w_4 & \leq & 72 \\ 1w_1 & + & 0w_2 & + & 1w_3 & - & 1w_4 & \leq & 24 \end{array}$$

$$v = 6w_1 + 5w_2 + 17w_3 + 9w_4 \rightarrow \text{Max}$$

Nichtnegativitätsbedingung:

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

$$w_4 \leq 0$$

Daher muss w_4 nun transformiert werden:

$$w_4' = -w_4$$

$$\begin{array}{rccccrcr} 1w_1 & + & 2w_2 & - & 1w_3 & + & 4w_4' & \leq & 36 \\ 2w_1 & + & 3w_2 & + & 1w_3 & - & 1w_4' & \leq & 72 \\ 1w_1 & + & 0w_2 & + & 1w_3 & + & 1w_4' & \leq & 24 \end{array}$$

$$v = 6w_1 + 5w_2 + 17w_3 - 9w_4' \rightarrow \text{Max}$$

Nichtnegativitätsbedingung:

$$w_1, w_2, w_3, w_4' \geq 0$$

6. Angabe der kanonischen Form

Schlupfvariablen

$$1w_1 + 2w_2 - 1w_3 + 4w_4' + w_5 = 36$$

$$2w_1 + 3w_2 + 1w_3 - 1w_4' + w_6 = 72$$

$$1w_1 + 0w_2 + 1w_3 + 1w_4' + w_7 = 24$$

$$v = 6w_1 + 5w_2 + 17w_3 - 9w_4' \rightarrow \text{Max}$$

7. Angabe des Ausgangstableaus

	BV	NBV	NBV	NBV	NBV	BV	BV	BV	RS	Q
		w1	w2	w3	w4'	w5	w6	w7		
BV	w5	1	2	-1	4	1	0	0	36	%
BV	w6	2	3	1	-1	0	1	0	72	72
BV	w7	1	0	1	1	0	0	1	24	24
	-v	6	5	17	-9	0	0	0	0	

8. Lösung der Aufgabenstellung mittels Simplexalgorithmus

	BV	NBV	NBV	NBV	NBV	BV	BV	BV	RS	Q
		w1	w2	w3	w4'	w5	w6	w7		
BV	w5	1	2	-1	4	1	0	0	36	%
BV	w6	2	3	1	-1	0	1	0	72	72
BV	w7	1	0	1	1	0	0	1	24	24
	-v	6	5	17	-9	0	0	0	0	

	BV	NBV	NBV	BV	NBV	BV	BV	NBV	RS	Q
		w1	w2	w3	w4'	w5	w6	w7		
BV	w5	2	2	0	5	1	0	1	60	30
BV	w6	1	3	0	-2	0	1	-1	48	16
BV	w3	1	0	1	1	0	0	1	24	%
	-v	-11	5	0	-26	0	0	-17	-408	

1	BV	NBV	BV	BV	NBV	BV	NBV	NBV	RS	Q
		w1	w2	w3	w4'	w5	w6	w7		
BV	w5	4/3	0	0	19/3	1	-2/3	5/3	28	
BV	w2	1/3	1	0	-2/3	0	1/3	-1/3	16	
BV	w3	1	0	1	1	0	0	1	24	
	-v	-38/3	0	0	-68/3	0	-5/3	-46/3	-488	

9. Ergebnis der Berechnung und deren Interpretation

Lösung Dualproblem

$$w_1 = 0$$

$$w_2 = 16$$

$$w_3 = 24$$

$$w_4' = 0 ; w_4 = 0$$

$$v = 488$$

$$v = 6w_1 + 5w_2 + 17w_3 - 9w_4' \rightarrow \text{Max}$$

$$488 = 6 \cdot 0 + 5 \cdot 16 + 17 \cdot 24 - 9 \cdot 0' \rightarrow \text{Max}$$

Transformation dualer Variablen in primale Variablen

Umrechnungstableau:

Primal	Dual	
x_j	w_{m+j}	für $j = 1, \dots, n$
x_{n+i}	w_i	für $i = 1, \dots, m$

n Zahl der primalen Variablen, m Zahl der Restriktionsungleichungen.

$$n = 3$$

$$m = 4$$

$$x_1 = w_5 = 0$$

$$x_2 = w_6 = 5/3$$

$$x_3 = w_7 = 46/3$$

Interpretation

Das Ergebnis der Berechnung des dualen Problems kommt zu dem gleichen Ergebnis wie die Berechnung im primalen Problem. Der Zielwert ist auch hier 488.

Durch geeignete Transformation der Variablen kann man das duale Problem auch wieder in ein Primalproblem umwandeln. Auch hier ergeben sich die gleichen Werte ($x_1 = 0$, $x_2 = 5/3$, $x_3 = 46/3$).